

**Informations concernant l'épreuve**

Barème et mode de calcul note finale	<b>1 point</b> pour une bonne réponse <b>0 point</b> pour aucune réponse ou une réponse ambiguë : réponse multiple, case raturée ou encadrée au lieu de noircie <b>- 0,25 point</b> pour une réponse fausse  Note finale /30
Durée	1h30
Calculatrice autorisée	<i>NON</i>
Consignes pour les candidats	<i>Merci de ne rien marquer sur le sujet</i> <i>Pour chaque question de l'épreuve, une seule bonne réponse possible</i> <i>Répondez sur la grille séparée</i> <i>Seules les grilles correctement remplies seront corrigées</i>
Consignes à l'attention des correcteurs	1. Chaque partie A et B est notée séparément 2. Note minimale pour une partie = 0 : pas de note négative 3. Note finale <b>sur 30</b> = Note Partie A + Note Partie B

**Thématiques couvertes par l'épreuve**

## Outils de base

- Inégalités dans  $\mathbb{R}$
- Suites numériques (convergence)
- Sommation discrète

Analyse, fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ 

- Limites, continuité, dérivabilité
- Sens de variation
- Intégration sur un intervalle
- Equations différentielles ordinaires
- Solution générale, solution particulière
- Equations différentielles linéaires à coefficients constants,

## Algèbre linéaire

- Espaces vectoriels
- Dimension finie
- Applications linéaires, sous espaces vectoriels associés

## Algèbre matricielle

- Matrices et applications linéaires
- Opérations élémentaires
- Déterminants
- Diagonalisation

**Epreuve écrite de Mathématiques**

Durée : 1 heure 30 minutes

*NB. : Dans cette épreuve, on demande d'indiquer, pour chaque question, l'unique bonne réponse parmi celles qui sont proposées.*

*Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Certaines questions sont dépendantes. Le sujet comporte deux niveaux de questions :

1. des questions d'applications du cours : 1-2-4-9-12-13-15-21-22-23-24-26-28-30 – Partie A
2. des questions nécessitant plus de réflexion : 3-5-6-7-8-10-11-14-16-17-18-19-20-25-27-29 – Partie B

**Section I**

Dans les questions 1) à 6), on considère sur  $I = \mathbb{R}$  l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  :

$$y''(t) - \frac{5}{2}y'(t) + y(t) = 10 \sin t, \text{ notée dans la suite } (E_1).$$

- 1) L'équation caractéristique associée à  $(E_1)$  est donnée par :
 

A) $r^2 - \frac{5}{2}r + 1 = 0,$	A) $e^{\mu t} = 1 + t + \frac{1}{2}\mu^2 t^2 + o(t^2),$
B) $r^3 - \frac{5}{2}r^2 + r = 0,$	B) $e^{\mu t} = 1 + \mu t + \frac{1}{2}\mu^2 t^2 + o(t^2),$
C) $r^2 - \frac{5}{2}r + r = 0,$	C) $e^{\mu t} = 1 - \mu t - \frac{1}{2}\mu^2 t^2 + o(t^2),$
D) $r'' - \frac{5}{2}r' + r = 0.$	D) $e^{\mu t} = 1 - t - \frac{1}{2}\mu^2 t^2 + o(t^2).$
  
- 2) Les solutions générales de l'équation homogène associée à  $(E_1)$  sont données par :
 

A) $y(t) = At^2 + \frac{1}{2},$	5) Soit $v$ la solution générale de l'équation différentielle $(E_1)$ . Un développement limité à l'ordre 2 de $v$ en 0 est alors, avec $A$ et $B$ réels :
B) $y(t) = Ae^{2t} + Be^{\frac{1}{2}t},$	A) $v(t) = (B + 2) + (2B + A - 2)t + (2B + 2A + 1)t^2 + o(t^2),$
C) $y(t) = Ae^{2t} + Be^{\frac{1}{2}t},$	B) $v(t) = (B + 2) + (2B - A + 2)t + (2B - 2A - 1)t^2 + o(t^2),$
D) $y(t) = A \cos 2t + B \sin \frac{1}{2}t.$	C) $v(t) = \frac{(B-2)}{8} + (2B + A + 2)t + (2B + 2A - 1)t^2 + o(t^2),$
	D) $v(t) = (A + B + 4) + \frac{(4A+B)}{2}t + (2A + \frac{B}{8} - 2)t^2 + o(t^2).$
  
- 3) Sur  $I$ , l'équation différentielle  $(E_1)$  a pour solution particulière la fonction  $\tilde{y}$  telle que :
 

A) $\tilde{y}(t) = 10 \sin t,$	6) La solution de l'équation $(E_1)$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ donne :
B) $\tilde{y}(t) = 10 \cos t,$	A) $A = B = 0,$
C) $\tilde{y}(t) = 4 \cos t,$	B) $A = B = 1,$
D) $\tilde{y}(t) = -10 \cos t.$	C) $A = \frac{4}{3}$ et $B = \frac{-16}{3},$
	D) $A = 4$ et $B = -16.$
  
- 4) Soit  $\mu$  un réel. Pour  $t$  au voisinage de 0, on vérifie :

**Section II**

Dans les questions 7) à 11), on considère, pour  $x > 0$ , la fonction  $x \mapsto \Gamma(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

- 7) On a :
- A)  $\Gamma(1) = 1,$
  - B)  $\Gamma(1) = 2,$
  - C)  $\Gamma(1) = 0,$
  - D)  $\Gamma(1) = -\infty.$
- 8) On a :
- A)  $\Gamma(x) = x\Gamma(x + 1),$
  - B)  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x + 1),$
  - C)  $\Gamma(x + 1) = (x + 1)\Gamma(x),$
  - D)  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$
- 9) On souhaite démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n + 1) = n!$ . Donner la bonne façon d'initialiser la récurrence.
- A) On a  $\Gamma(1) = 1! = 1.$
  - B) On a  $\Gamma(1) = 0! = 1.$
  - C) D'une part  $\Gamma(1) = 1$  et d'autre part  $1! = 1.$
  - D) D'une part  $\Gamma(1) = 1$  et d'autre part  $0! = 1.$
- 10) On pose  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ . La valeur de  $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$  est donnée par :
- A)  $\frac{\sqrt{\pi}}{4},$
  - B)  $\frac{3\sqrt{\pi}}{4},$
  - C)  $\frac{\sqrt{\pi}}{2},$
  - D)  $2\sqrt{\pi}.$
- 11) En effectuant le changement de variable  $u = \sqrt{t}$  dans  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ , on obtient :
- A)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$
  - B)  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$
  - C)  $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$
  - D)  $\int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$

### Section III

Dans les questions 12) à 24), on considère l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_2[X]$ , l'ensemble des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels. On considère également l'application définie sur  $E$  par  $\Psi: P \mapsto XP'$ .

- 12) Quelle est la bonne façon de caractériser  $E$  ?
- A) C'est un espace vectoriel de dimension 2 et  $(1, X, X^2)$  en forme une base.
  - B) C'est un espace vectoriel de dimension infinie et  $(1, X, X^2)$  en forme une base.
  - C) C'est un espace vectoriel de dimension 3 et  $(1, X, X^2)$  en forme une base.
  - D) C'est un espace vectoriel de dimension 1 et  $(1 + X + X^2)$  en forme une base.
- 13) L'ensemble d'arrivée de l'application  $\Psi$  est :
- A)  $\mathbb{R},$
  - B)  $\mathbb{R}_2[X],$
  - C)  $\mathbb{C},$
  - D)  $\mathbb{R}_1[X].$
- 14) L'application  $\Psi$  est-elle :
- A) Injective,
  - B) Surjective,
  - C) Ni l'un, ni l'autre,
  - D) Bijective ?
- 15) L'application  $\Psi$  est-elle :
- A) Un endomorphisme,
  - B) Un isomorphisme,
  - C) Un difféomorphisme,
  - D) Un automorphisme ?
- 16) Le noyau de  $\Psi$  est donné par :
- A)  $\ker \Psi = \mathbb{R},$
  - B)  $\ker \Psi = \mathbb{R}_2[X],$
  - C)  $\ker \Psi = \{0\},$
  - D)  $\ker \Psi = \mathbb{R}[X].$
- 17) L'image de  $\Psi$  est donnée par :
- A)  $\text{Im } \Psi = \mathbb{R},$
  - B)  $\text{Im } \Psi = \mathbb{R}_2[X],$
  - C)  $\text{Im } \Psi = \text{vect}\{2X^2, X\},$
  - D)  $\text{Im } \Psi = \text{vect}\{2X^2, 1\}.$
- 18) On considère les polynômes  $P = 1, Q = 1 + 2X$  et  $R = 1 + 2X + 3X^2$ . La matrice représentant  $\Psi$  exprimée dans la base  $B_0 = (P, Q, R)$  est donnée par :
- A)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$
  - B)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix},$
  - C)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
  - D)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$
- 19) Le déterminant de la matrice  $A$  vaut :
- A) 2,
  - B) 4,
  - C) 6,

- D) 0.
- 20) Le rang de  $\Psi$  vaut :
- A) 0,  
B) 1,  
C) 2,  
D) 3.
- 21) Soit  $\chi_A$  le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ , défini par  $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ . La quantité  $\chi_A(\lambda)$  a pour expression :
- A)  $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda$ ,  
B)  $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$ ,  
C)  $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$ ,  
D)  $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$ .
- 22) Laquelle de ces valeurs n'est pas une valeur propre de  $A$  :
- A) 0  
B) 1
- C) 2  
D) 3
- 23) La matrice  $A$  est diagonalisable :
- A) car son polynôme caractéristique est scindé,  
B) car son polynôme caractéristique est de degré 3,  
C) car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples,  
D) car son polynôme caractéristique est à racines simples.
- 24) On note  $D$  une matrice diagonale semblable à  $A$ , et  $P$  la matrice de passage de la base  $B_0$  à la base propre associée à  $D$ .
- A)  $A = PDP^{-1}$ ,  
B)  $A = P^{-1}DP$ ,  
C)  $A = P^{-1}DP^{-1}$ ,  
D)  $A = PDP$ .

#### Section IV

Dans les questions 25) à 30), on considère, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $x \mapsto f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$ .

- 25) Quelle proposition concernant la fonction  $f_n$  est fautive :
- A)  $f_n$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ ,  
B)  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ ,  
C)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$ ,  
D)  $f_n$  réalise une bijection entre  $[0, +\infty[$  et  $[-1, +\infty[$ .
- 26) D'après ce qui précède, on peut dire que :
- A)  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ ,  
B)  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_+$ ,  
C)  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}_-$ ,  
D)  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution sur  $[-1, +\infty[$ .
- 27) On note  $u_n$  la solution de la question précédente. Cette solution définit une suite qui est :
- A) Croissante,  
B) Décroissante,  
C) Constante,  
D) Nulle.
- 28) Soit  $x \in ]0, 1[$ . On a :
- A)  $f_n(x) = \frac{2x-1-x^{n+1}}{1-x}$ ,  
B)  $f_n(x) = \frac{2x-2-x^{n+1}}{2-x}$ ,  
C)  $f_n(x) = \frac{x-2-x^{n+1}}{1-x}$ ,  
D)  $f_n(x) = \frac{1-x}{x-x^{n+1}}$ .
- 29) Soit  $\rho \in ]1/2, 1[$ . En calculant  $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$  et en déterminant le signe de  $f_n(\rho)$  on déduit que :
- A)  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \rho$ ,  
B)  $\frac{1}{2} \geq u_n \geq \rho$ ,  
C)  $u_n = \frac{1}{2}$ ,  
D)  $u_n = \rho$ .
- 30) D'après ce qui précède, on peut dire que :
- A)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ,  
B)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ ,  
C)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \rho$ ,  
D)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

Nom et Prénom

.....

Réponses aux questions d'applications directes PARTIE A	Réponses aux questions avancées PARTIE B
Question 1 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 2 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 3 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 4 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 5 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 6 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 7 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 8 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 9 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 10 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 11 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 12 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 13 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 14 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 15 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 16 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 17 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 18 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 19 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 20 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 21 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 22 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 23 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 24 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 25 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 26 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 27 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 28 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 29 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 30 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Note Partie A (/14) :	Note Partie B (/16) :
Note Finale (/30) :	