

### Informations concernant l'épreuve

Barème et mode de calcul note finale	<b>1 point</b> pour une bonne réponse <b>0 point</b> pour aucune réponse ou une réponse ambiguë : réponse multiple, case raturée ou encadrée au lieu de noircie <b>- 0,25 point</b> pour une réponse fausse  Note finale /30
Durée	1h30
Calculatrice autorisée	<i>NON</i>
Consignes pour les candidats	<i>Merci de ne rien marquer sur le sujet</i> <i>Pour chaque question de l'épreuve, une seule bonne réponse possible</i> <i>Répondez sur la grille séparée</i> <i>Seules les grilles correctement remplies seront corrigées</i>
Consignes à l'attention des correcteurs	1. Chaque partie A et B est notée séparément 2. Note minimale pour une partie = 0 : pas de note négative 3. Note finale <b>sur 30</b> = Note Partie A + Note Partie B

### Thématiques couvertes par l'épreuve

#### Outils de base

- Trigonométrie
- Inégalités dans  $\mathbb{R}$
- Suites numériques (convergence)
- Sommation discrète

#### Analyse, fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- Limites, continuité, dérivabilité
- Sens de variation
- Intégration sur un intervalle
- Equations différentielles ordinaires
- Solution générale, solution particulière
- Equations différentielles linéaires à coefficients constants,

#### Algèbre linéaire

- Espaces vectoriels
- Dimension finie
- Applications linéaires, sous espaces vectoriels associés

#### Algèbre matricielle

- Matrices et applications linéaires
- Opérations élémentaires
- Déterminants
- Diagonalisation

**Épreuve écrite de Mathématiques**

Durée : 1 heure 30 minutes

**NB.** : Dans cette épreuve, on demande d'indiquer, pour chaque question, la bonne réponse parmi celles qui sont proposées.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Certaines questions sont dépendantes. Le sujet comporte deux niveaux de questions :

1. des questions d'applications du cours : 1-3-5-8-10-15-16-17-18-20-25-28-29-30 – Partie A
2. des questions nécessitant plus de réflexion : 2-4-6-7-9-11-12-13-14-19-21-22-23-24-26-27 – Partie B

**Section I**

Dans les questions 1) à 9), on considère sur  $I = \mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle suivante d'inconnue  $u$  :

$$t^2 u'' + (4t - 4t^2)u' + (2 - 8t + 4t^2)u = 18 e^{-t}, \quad \text{notée } (E_u).$$

Soit la fonction annexe  $t \mapsto v(t) = t^2 u(t)$ , définie sur  $I$ .

- 1) La fonction  $v$  est deux fois dérivable sur  $I$  et :
  - A)  $u'' = 6t^{-4}v - 2t^{-3}v' + t^{-2}v''$ ,
  - B)  $u'' = t^{-4}v - t^{-3}v' + t^{-2}v''$ ,
  - C)  $u'' = 6t^{-4}v - 4t^{-3}v' + t^{-2}v''$ ,
  - D)  $u'' = 3t^{-4}v - 4t^{-3}v' + t^{-2}v''$ .
- 2) La fonction  $v$  vérifie sur  $I$  l'équation différentielle notée  $(E_v)$  :
  - A)  $v'' - 4v' + 4v = 18 e^{-t}$ ,
  - B)  $v'' + 4v' + 4v = 18 e^{-t}$ ,
  - C)  $v'' - 4v' + 5v = 18 e^{-t}$ ,
  - D)  $v'' + 4v' + 5v = 18 e^{-t}$ .
- 3) Soit  $(H_v)$  l'équation différentielle définie à partir de  $(E_v)$  en remplaçant  $18 e^{-t}$  par 0. La solution générale de  $(H_v)$  est, avec  $a$  et  $b$  réels :
  - A)  $v = (at + b) e^{-2t}$ ,
  - B)  $v = at e^{2t}$ ,
  - C)  $v = b e^{-2t}$ ,
  - D)  $v = (at + b) e^{2t}$ .
- 4) Sur  $I$ , l'équation différentielle  $(E_v)$  a pour solution particulière la fonction  $v_p$  telle que :
  - A)  $v_p(t) = 2t e^{-t}$ ,
  - B)  $v_p(t) = 2t e^{2t}$ ,
  - C)  $v_p(t) = 2 e^{2t}$ ,
  - D)  $v_p(t) = 2 e^{-t}$ .
- 5) Soit  $\mu$  un réel. Pour  $t$  au voisinage de 0, on vérifie :
  - A)  $e^{\mu t} = 1 + t + \frac{1}{2}\mu^2 t^2 + o(t^2)$ ,
  - B)  $e^{\mu t} = 1 + \mu t + \frac{1}{2}\mu^2 t^2 + o(t^2)$ ,
  - C)  $e^{\mu t} = 1 - \mu t - \frac{1}{2}\mu^2 t^2 + o(t^2)$ ,
  - D)  $e^{\mu t} = 1 - t - \frac{1}{2}\mu^2 t^2 + o(t^2)$ .
- 6) Soit  $v$  la solution générale de l'équation différentielle  $(E_v)$ . Un développement limité à l'ordre 2 de  $v$  en  $0^+$  est alors, avec  $a$  et  $b$  réels :
  - A)  $v(t) = (b + 2) + (2b + a - 2)t + (2b + 2a + 1)t^2 + o(t^2)$ ,
  - B)  $v(t) = (b + 2) + (2b - a + 2)t + (2b - 2a - 1)t^2 + o(t^2)$ ,
  - C)  $v(t) = (b - 2) + (2b + a + 2)t + (2b + 2a - 1)t^2 + o(t^2)$ ,
  - D)  $v(t) = (b - 2) + (2b - a - 2)t + (2b - 2a + 1)t^2 + o(t^2)$ .
- 7) La fonction  $u$ , solution de  $(E_u)$  sur  $I$ , possède une limite réelle en  $0^+$ , notée  $l$ , si et seulement si :
  - A)  $a = 4$  et  $b = -2$ ,
  - B)  $a = 4$  et  $b = 2$ ,
  - C)  $a = 6$  et  $b = 2$ ,
  - D)  $a = 6$  et  $b = -2$ .
- 8) Lorsque la fonction  $u$ , solution de  $(E_u)$  sur  $I$ , possède une limite réelle en  $0^+$ , cette limite  $l$  vaut :
  - A) 17,
  - B) 13,
  - C) 9,
  - D) 5.



**Section III**

Dans les questions 15) à 30), on considère :

- un espace vectoriel  $E$  muni d'une base  $B_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,
- les applications linéaires  $f, f_1 = f - id, f_2 = f - 2 id$ , de  $E$  dans  $E$ , représentées dans la base  $B_0$  par les matrices respectives  $A, A_1$  et  $A_2$ ,
- la matrice  $I$ , matrice identité de dimension 3,
- la matrice  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

15) Le vecteur  $f(\vec{e}_2)$  vaut :

- A)  $3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$ ,
- B)  $2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$ ,
- C)  $-2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$ ,
- D)  $-2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$ .

16) Soient les vecteurs  $\vec{u} \in E$  et  $\vec{v} = f(\vec{u})$ . On note  $(u_1, u_2, u_3)$  et  $(v_1, v_2, v_3)$  les composantes respectives de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans la base  $B_0$ . Alors la quantité  $v_2$  vaut :

- A)  $-2u_1 - 2u_3$ ,
- B)  $-2u_1 + 3u_3$ ,
- C)  $2u_1 - 2u_3$ ,
- D)  $3u_1 - 2u_3$ .

17) La matrice  $A_2$  vaut :

- A)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ,
- B)  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ,
- C)  $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ,
- D)  $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

18) On a respectivement :

- A)  $A_1^2 = A_1$  et  $A_2^2 = -A_2$ ,
- B)  $A_1^2 = A_1$  et  $A_2^2 = A_2$ ,
- C)  $A_1^2 = -A_1$  et  $A_2^2 = A_2$ ,
- D)  $A_1^2 = -A_1$  et  $A_2^2 = -A_2$ .

19) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , On a respectivement :

- A)  $A_1^n = A_1$  et  $A_2^n = A_2$ ,
- B)  $A_1^n = A_1$  et  $A_2^n = (-1)^n A_2$ ,
- C)  $A_1^n = A_1$  et  $A_2^n = (-1)^{n+1} A_2$ ,
- D)  $A_1^n = -A_1$  et  $A_2^n = -A_2$ .

20) Le déterminant de la matrice  $A$  vaut :

- A) 2,
- B) 4,
- C) 6,
- D) 8.

21) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la matrice  $A^n$  a pour expression :

- A)  $I + (2^n - 1)A_1$ ,
- B)  $I + (3^n - 2)A_1$ ,
- C)  $(2^n - 1)I + A_1$ ,
- D)  $(3^n - 2)I + A_1$ .

22) Soit  $P_A$  le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ , défini par  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ . La quantité  $P_A(\lambda)$  a pour expression :

- A)  $(2 - \lambda) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 & 0 \\ 3 & -\lambda & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ ,
- B)  $(2 - \lambda) \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 & -2 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ,
- C)  $(2 - \lambda) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ 3 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$ ,
- D)  $(2 - \lambda) \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$ .

23) La quantité  $P_A(\lambda)$  a pour expression :

- A)  $(2 - \lambda)(1 - \lambda)^2$ ,
- B)  $(2 - \lambda)^3$ ,
- C)  $(2 - \lambda)(\lambda - 1)\lambda$ ,
- D)  $(2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$ .

24) Le noyau de  $f_1$  est noté  $\text{Ker}(f_1)$ . Il est égal à :

- A)  $\text{Vect}\{(0, -1, 1)\}$ ,
- B)  $\text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ ,
- C)  $\text{Vect}\{(0, -1, 1), (2, 2, 1)\}$ ,
- D)  $\text{Vect}\{(1, 1, 1), (2, 2, 1)\}$ .

25) Le rang de  $f_1$  vaut :

- A) 0,
- B) 1,
- C) 2,
- D) 3.

26)  $\text{Ker}(f_2)$  est égal à :

- A)  $\text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ ,
- B)  $\text{Vect}\{(0, -1, 1), (2, 2, 1)\}$ ,
- C)  $\text{Vect}\{(1, 1, 1), (2, 2, 1)\}$ ,
- D)  $\text{Vect}\{(0, -1, 1)\}$ .

- 27) L'image de  $f_2$  est notée  $Im(f_2)$ . Elle est égale à :
- A)  $Vect\{(1,1,1)\}$ ,
  - B)  $Vect\{(0,-1,1), (2,2,1)\}$ ,
  - C)  $Vect\{(1,1,1), (2,2,1)\}$ ,
  - D)  $Vect\{(0,-1,1)\}$ .

- 28) La matrice  $A$  est diagonalisable :
- A) dans  $\mathbb{R}$ , mais pas dans  $\mathbb{C}$ ,
  - B) dans  $\mathbb{C}$ , mais pas dans  $\mathbb{R}$ ,
  - C) ni dans  $\mathbb{R}$  ni dans  $\mathbb{C}$ ,
  - D) dans  $\mathbb{R}$  et dans  $\mathbb{C}$ .

Si la matrice  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ , alors on note  $D$  une matrice semblable à  $A$ , et  $P$  la matrice de passage de la base  $B_0$  à la base propre associée à  $D$ .

- 29) La relation suivante est alors vérifiée :

- A)  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ ,
- B)  $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$ ,
- C)  $A = P^{-1} \cdot D \cdot P^{-1}$ ,
- D)  $A = P \cdot D \cdot P$ .

- 30) Dans l'écriture de la question précédente :

- A) Une permutation circulaire des colonnes de  $P$  est possible sans modifier  $D$ ,
- B) Une permutation des termes diagonaux distincts de  $D$  est possible sans modifier les colonnes de  $P$ ,
- C) Une permutation des termes diagonaux de  $D$  s'accompagne d'une permutation des colonnes de  $P$ ,
- D) Les matrices  $D$  et  $P$  sont uniques.

Nom et Prénom

.....

Réponses aux questions d'applications directes PARTIE A	Réponses aux questions avancées PARTIE B
Question 1 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 2 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 3 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 4 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 5 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 6 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 7 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 8 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 9 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 10 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 11 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 12 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 13 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 14 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 15 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 16 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 17 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 18 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 19 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 20 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 21 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 22 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 23 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 24 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 25 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 26 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 27 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 28 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 29 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 30 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
<b>Note Partie A (/14) :</b>	<b>Note Partie B (/16) :</b>
<b>Note Finale (/30) :</b>	