

1. Informations concernant l'épreuve

Barème et mode de calcul note finale	/30 points 1 point par question
Durée	1h30
Calculatrice autorisée	<i>NON</i>
Consignes pour les candidats	<i>Merci de ne rien marquer sur le sujet Pour chaque question de l'épreuve, une seule bonne réponse possible Répondez sur la grille séparée Seules les grilles correctement remplies seront corrigées</i>

2. Enoncé de l'épreuve

pages 2 à 6

3. Thématiques couvertes

page 7

4. Feuille de réponses

page 8

Concours Commun EG@ 2023
2. Enoncé : Epreuve écrite de Mathématiques

Durée : 1 heure 30 minutes

NB. : Dans cette épreuve, on demande d'indiquer, pour chaque question, la bonne réponse parmi celles qui sont proposées.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Certaines questions sont dépendantes. Le sujet comporte deux niveaux de questions :

- 1. des questions d'applications du cours : 1-2-3-4-5-6-7-13-16-23-26**
- 2. des questions nécessitant plus de réflexion : 8-9-10-11-12-14-15-17-18-19-20-21-22-24-25-27-28-29-30**

Partie I

On considère sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

- $2y'' + a(x)y' - y = 0$, notée (H_a) ,
- $2y' + a(x)y = b$, notée (E_a) .

Où $x \mapsto a(x)$ est une fonction définie et continue sur \mathbb{R} et b est une constante réelle.

On considère la fonction f définie par $x \mapsto f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt$.

Dans les questions 1) à 4), on prendra $\forall x \in \mathbb{R}, a(x) = -1$:

- 1) La solution générale de (H_a) est la fonction suivante, où A et B sont des constantes réelles :

- A) $x \mapsto y(x) = Ae^x + Be^{\frac{-x}{2}}$,
- B) $x \mapsto y(x) = Ae^{2x} + Be^x$,
- C) $x \mapsto y(x) = (Ax + B)e^x$,
- D) $x \mapsto y(x) = (Ax + B)e^{\frac{-x}{2}}$.

- 2) La solution de (H_a) vérifiant les relations $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$ est :

- A) $x \mapsto y(x) = e^x + 2e^{\frac{-x}{2}}$,
- B) $x \mapsto y(x) = -3e^{2x} + 6e^x$,
- C) $x \mapsto y(x) = (-3x + 3)e^x$,
- D) $x \mapsto y(x) = \left(\frac{3}{2}x + 3B\right)e^{\frac{-x}{2}}$.

- 3) Pour $b = 0$, La solution générale de (E_a) est la fonction suivante, où C est une constante réelle :

- A) $x \mapsto y(x) = Ce^{\frac{-x}{2}}$,
- B) $x \mapsto y(x) = Ce^{2x}$,
- C) $x \mapsto y(x) = Ce^{\frac{x}{2}}$,
- D) $x \mapsto y(x) = Ce^{-2x}$.

- 4) Pour $b = -1$, La solution générale de (E_a) est la fonction suivante, où C est une constante réelle :

- A) $x \mapsto y(x) = Ce^{\frac{-x}{2}} + x$,
- B) $x \mapsto y(x) = Ce^{2x} + 1$,
- C) $x \mapsto y(x) = Ce^{\frac{x}{2}} + 1$,
- D) $x \mapsto y(x) = Ce^{-2x} + 1$.

Dans la question 5), on prendra $\forall x \in \mathbb{R}, a(x) = -x$ et $b = 0$:

- 5) La solution générale de (E_a) est la fonction suivante, où C est une constante réelle :

- A) $x \mapsto y(x) = Ce^{\frac{x}{2}}$,
- B) $x \mapsto y(x) = Ce^{\frac{x^2}{4}}$,
- C) $x \mapsto y(x) = Ce^{\frac{-x^2}{4}}$,
- D) $x \mapsto y(x) = Ce^{\frac{-x}{2}}$.

- 6) La fonction f est définie sur :

- A) $D_f = \mathbb{R}^+$,
- B) $D_f = \mathbb{R}^*$,
- C) $D_f = \mathbb{R}^-$,
- D) $D_f = \mathbb{R}$.

- 7) La fonction f est indéfiniment dérivable sur :

- A) $D_\infty = \mathbb{R}$,
- B) $D_\infty = \mathbb{R}^*$,
- C) $D_\infty = \mathbb{R}^-$,
- D) $D_\infty = \mathbb{R}^+$.

8) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in D_\infty$, on a :

- A) $f^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p e^{tx-t^2} dt,$
- B) $f^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p e^{tx-t^2} dt,$
- C) $f^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-2t)^p e^{tx-t^2} dt,$
- D) $f^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (tx-t^2)^p e^{tx-t^2} dt.$

9) En $x = 0$:

- A) f est dérivable et $f'(x) = 0,$
- B) f est dérivable et $f'(x) = -1,$
- C) f n'est pas dérivable,
- D) f est dérivable et $f'(x) = -\frac{1}{2}.$

10) La fonction f est une solution de l'équation différentielle (H_a) si :

- A) $x \mapsto a(x) = 0,$
- B) $x \mapsto a(x) = 1,$
- C) $x \mapsto a(x) = x,$
- D) $x \mapsto a(x) = -x.$

Dans la suite, on garde la même fonction $a : x \mapsto a(x)$ trouvée dans la question précédente.

11) La fonction f est une solution de l'équation différentielle (E_a) si :

- A) $b = 1,$
- B) $b = 0,$
- C) $b = -1,$
- D) $b = -\frac{1}{2}.$

On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$

12) Pour tout $x \in D_f$ la fonction f est définie par :

- A) $f(x) = \sqrt{\pi} e^{\frac{x}{2}},$
- B) $f(x) = e^{\frac{x^2}{4}},$
- C) $f(x) = \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}},$
- D) $f(x) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}.$

Partie II

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction g_n définie sur \mathbb{R} par $g_n: x \mapsto x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$, et l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(x) dx$.
 Pour tout réel $a > 0$, on pose $I_n(a) = \int_0^a g_n(x) dx$.

13) Pour tout entier naturel n on a :

- A) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_n(x) = +\infty$
- B) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_n(x) = 0$
- C) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_n(x) = -\infty$
- D) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_n(x)$ n'existe pas.

14) $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall a > 0$:

- A) $I_{n+2}(a) = (n+1)I_{n+1}(a) - a^{n+1}e^{-\frac{a^2}{2}}$,
- B) $I_{n+2}(a) = \frac{1}{n+1} I_{n+1}(a) + a^{n+1}e^{-\frac{a^2}{2}}$,
- C) $I_{n+2}(a) = (n+1)I_n(a) - a^{n+1}e^{-\frac{a^2}{2}}$,
- D) $I_{n+2}(a) = \frac{1}{n+1} I_n(a) + a^{n+1}e^{-\frac{a^2}{2}}$.

15) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

- A) $I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}$,
- B) $I_{n+2} = \frac{1}{n+1} I_{n+1}$,
- C) $I_{n+2} = (n+1)I_n$,
- D) $I_{n+2} = \frac{1}{n+1} I_n$.

Dans la suite on admet que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

16) On a :

- A) $I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,
- B) $I_1 = 1$,
- C) $I_1 = \sqrt{2\pi}$,
- D) $I_1 = \sqrt{\pi}$.

17) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

- A) $I_{2n} = \frac{(2n-1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,
- B) $I_{2n} = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,
- C) $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,
- D) $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{n-1}(n-1)!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

18) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

- A) $I_{2n+1} = 2^n n!$,
- B) $I_{2n+1} = 2^n n! \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,
- C) $I_{2n+1} = 2^{n-1}(n-1)!$,
- D) $I_{2n+1} = 2^{n-1}(n-1)! \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Partie III

Dans les questions 19) à 30), on considère :

- la matrice I , matrice identité de dimension 3,
- les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, et $B = A - 2I$.
- Le vecteur $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- u l'endomorphisme canonique associé à la matrice B ,
- v l'endomorphisme canonique associé à la matrice A .

19) Soit P_A le polynôme caractéristique de la matrice A , défini par $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. La quantité $P_A(\lambda)$ a pour expression :

- A) $(2 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,
- B) $(3 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$,
- C) $(1 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$,
- D) $(2 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$.

20) La matrice A possède :

- A) Trois valeurs propres distinctes deux à deux $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.
- B) Une valeur propre simple $\lambda_1 = 1$ et une valeur propre double $\lambda_2 = 2$,
- C) Une valeur propre double $\lambda_1 = 1$ et une valeur propre simple $\lambda_2 = 2$,
- D) Une valeur propre $\lambda = 2$ d'ordre de multiplicité 3.

21) On a :

- A) $\text{Ker}(u) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- B) $\text{Ker}(u) = \mathbb{R}e + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- C) $\text{Ker}(u) = \mathbb{R}e$,
- D) $\text{Ker}(u) = \mathbb{R}e + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

22) On a donc :

- A) La matrice A est diagonalisable dans \mathbb{R} ,
- B) La matrice A est diagonalisable dans \mathbb{C} ,
- C) La matrice A est trigonalisable dans \mathbb{R} ,

D) La matrice A n'est ni diagonalisable ni trigonalisable dans \mathbb{R} .

23) On a :

- A) $B^2 = 0$,
- B) $B^3 = 0$,
- C) $B^2 - 2B = 0$,
- D) $B^3 - B = 0$.

24) La matrice B est de rang :

- A) 0,
- B) 1,
- C) 2,
- D) 3.

25) On a :

- A) $\text{Ker}(u^2) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- B) $\text{Ker}(u^2) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- C) $\text{Ker}(u^2) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- D) $\text{Ker}(u^2) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

26) On a :

- A) $u(e) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u^2(e) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,
- B) $u(e) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u^2(e) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,
- C) $u(e) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u^2(e) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
- D) $u(e) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u^2(e) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

27) La famille $B = (e, u(e), u^2(e))$:

- A) Est une base de $\text{Ker}(u)$
- B) Est une base de $\text{Ker}(u^2)$,
- C) Est une base de $\text{Im}(u)$,
- D) Est une base de \mathbb{R}^3 .

Dans la suite on note T la matrice associée à v dans la base $B = (e, u(e), u^2(e))$.

28) On a :

- A) $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,
- B) $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
- C) $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

D) $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

29) La relation suivante est alors vérifiée :

- A) $A = P^{-1}.T.P$,
- B) $A = P.T.P^{-1}$,
- C) $A = P^{-1}.T.P^{-1}$,
- D) $A = P.T.P$.

30) La relation suivante est alors vérifiée :

- A) $B = P^{-1}.(T - 2I).P$,
- B) $B = P.(T - 2I).P^{-1}$,
- C) $B = P^{-1}.(T - 2I).P^{-1}$,
- D) $B = P.(T - 2I).P$.

3. Thématiques couvertes

Outils de base

- Trigonométrie
- Inégalités dans \mathbb{R}
- Suites numériques (convergence)
- Sommation discrète

Analyse, fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

- Limites, continuité, dérivabilité
- Sens de variation
- Intégration sur un intervalle
- Equations différentielles ordinaires
- Solution générale, solution particulière
- Equations différentielles linéaires

Algèbre linéaire

- Espaces vectoriels
- Dimension finie
- Applications linéaires, sous espaces vectoriels associés

Algèbre matricielle

- Matrices et applications linéaires
- Opérations élémentaires
- Déterminants
- Diagonalisation

4. **Feuille de réponses :** les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte

Noms et Prénoms

.....

Réponses aux questions d'applications directes	Réponses aux questions avancées
Question 1 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 2 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 3 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 4 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 5 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 6 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 7 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 8 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 9 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 10 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 11 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 12 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 13 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 14 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 15 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 16 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 17 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 18 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 19 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 20 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 21 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 22 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 23 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 24 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 25 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 26 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 27 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 28 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 29 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 30 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Total :	Total :