

Informations concernant l'épreuve

Barème et mode de calcul note finale	1 point par question
Durée	1h30
Calculatrice autorisée	NON
Consignes pour les candidats	<i>Merci de ne rien marquer sur le sujet Pour chaque question de l'épreuve, une seule bonne réponse possible Répondez sur la grille séparée Seules les grilles correctement remplies seront corrigées</i>

NB. : Dans cette épreuve, on demande d'indiquer, pour chaque question, la bonne réponse parmi celles qui sont proposées.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Certaines questions sont dépendantes. Le sujet comporte deux niveaux de questions :

1. des questions d'applications du cours : 1-2-3-9-11-12-13-14-16-17-18-19-20-22-23-24-29-30
2. des questions nécessitant plus de réflexion : 4-5-6-7-8-10-15-21-25-26-27-28

Partie I

On considère sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

- $y'' + 4y' + 5y = 0$, notée (H),
- $y'' + 4y' + 5y = (4t + 2)e^{-t}$, notée (E).

- 1) La solution générale de (H) est la fonction suivante, où A et B sont des constantes réelles :
 - A) $t \mapsto y = e^{-t}(A \cos(t) + B \sin(t))$,
 - B) $t \mapsto y = e^{-t}(A \cos(2t) + B \sin(2t))$,
 - C) $t \mapsto y = Ae^{-2t} \cos(t)$,
 - D) $t \mapsto y = e^{-2t}(A \cos(t) + B \sin(t))$.

- 2) La solution de (H) vérifiant les relations $y(0) = 1$ et $y'(0) = -3$ est la fonction suivante, notée f , telle que :
 - A) $f(t) = e^{-t}(\cos(t) + \sin(t))$,
 - B) $f(t) = e^{-2t}(\cos(2t) + \sin(2t))$,
 - C) $f(t) = e^{-2t}(\cos(t) - \sin(t))$,
 - D) $f(t) = e^{-t}(\cos(2t) - \sin(2t))$.

- 3) Pour t réel, la quantité $f(t)$ a pour expression :
 - A) $\sqrt{2}e^{-2t} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$,
 - B) $\sqrt{2}e^{-2t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$,
 - C) $\sqrt{2}e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$,
 - D) $\sqrt{2}e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

- 4) Sur \mathbb{R}_+ , l'ensemble des points en lesquels la fonction f s'annule est caractérisé par :
 - A) $t_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}$,
 - B) $t_k = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$,
 - C) $t_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{N}$,
 - D) $t_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{N}$.

- 5) L'équation différentielle (E) admet une solution particulière y_p telle que :
 - A) $y_p(t) = (2t + 1)e^{-t}$,
 - B) $y_p(t) = (2t - 1)e^{-t}$,
 - C) $y_p(t) = (2t + 1)e^{-2t}$,
 - D) $y_p(t) = (2t - 1)e^{-2t}$.

- 6) La solution de (E) vérifiant les relations $y(0) = -1$ et $y'(0) = 2$ est la fonction suivante, notée g , telle que :
 - A) $g(t) = (2t + 1)e^{-2t} + e^{-t} \cos(t)$,
 - B) $g(t) = (2t + 1)e^{-2t} - e^{-t} \cos(t)$,
 - C) $g(t) = (2t - 1)e^{-t} + e^{-2t} \sin(t)$,
 - D) $g(t) = (2t - 1)e^{-t} - e^{-2t} \sin(t)$.

- 7) Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(t) = e^t g(t)$. Alors, lorsque t tend vers $+\infty$:
 - A) h ne possède aucune limite,
 - B) h tend vers une limite réelle,
 - C) h tend vers $-\infty$,
 - D) h tend vers $+\infty$.

Partie II

Dans les questions 8) à 15), on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto f(x) = \frac{e^{-3x+1}}{e^{-2x+1}}$.

Pour X réel positif, on définit $I(X) = \int_0^X f(x)dx$.

- 8) En posant $u = e^x$, on écrit $I(X) = J(U) = \int_1^U g(u)du$, où $U = e^X$ et où le réel $g(u)$ est donné par :
- A) $\frac{1+u^3}{1+u^2}$
 B) $\frac{1+u^3}{u(1+u^2)}$
 C) $\frac{1+u^3}{u^2(1+u^2)}$
 D) $\frac{1+u^3}{u^3(1+u^2)}$
- 9) $\forall u \in [1, U]$:
- A) $2 \leq 1 + u^3 \leq 1 + u^2$,
 B) $2 \leq 1 + u^2 \leq 1 + u^3$,
 C) $1 + u^2 \leq 1 + u^3 \leq 2$,
 D) $1 + u^3 \leq 1 + u^2 \leq 2$.
- 10) D'après l'encadrement précédent, on peut déduire que l'intégrale $I(\ln(2))$ appartient à l'intervalle :
- A) $[3/2, 2]$,
 B) $[1, 3/2]$,
 C) $[1/2, 1]$,
 D) $[0, 1/2]$.
- 11) Pour tout réel u de $[1, U]$, le réel $\frac{1+u^3}{1+u^2}$ est égal à :
- A) $1 + \frac{u^2(u-1)}{1+u^2}$
 B) $u + \frac{u(u-1)}{1+u^2}$
 C) $1 + \frac{u(u^2-1)}{1+u^2}$
 D) $u + \frac{u^2}{1+u^2}$
- 12) Le réel $\text{Arctan}(1)$ vaut :
- A) $-\frac{\pi}{2}$
 B) $-\frac{\pi}{4}$
 C) $\frac{\pi}{4}$
 D) $\frac{\pi}{2}$
- 13) Une primitive de la fonction $f_1 : u \mapsto f_1(u) = \frac{u}{1+u^2}$ est donnée par F_1 avec :
- A) $F_1(u) = \frac{1}{2}\text{Arctan}(u)$,
 B) $F_1(u) = \ln(1 + u^2)$,
 C) $F_1(u) = \frac{1}{2}\ln(1 + u^2)$,
 D) $F_1(u) = \text{Arctan}(1 + u^2)$.
- 14) Une primitive de la fonction $f_2 : u \mapsto f_2(u) = \frac{1}{1+u^2}$ est donnée par F_2 avec :
- A) $F_2(u) = \text{Arctan}(1 + u^2)$,
 B) $F_2(u) = \text{Arctan}(u)$,
 C) $F_2(u) = \frac{1}{2}\ln(1 + u^2)$,
 D) $F_2(u) = \ln(1 + u^2)$.
- 15) L'intégrale $I(\ln(2))$ vaut :
- A) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \text{Arctan}(2) + \frac{1}{2}\ln(5/2)$,
 B) $-\frac{1}{2} - \text{Arctan}(2) + \frac{1}{2}\ln(5/2)$,
 C) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \text{Arctan}(2)$,
 D) $-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - \text{Arctan}(2) + \frac{1}{2}\ln(5/2)$.

Partie III

Dans les questions 16) à 30), on considère :

- un espace vectoriel E muni d'une base $B_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,
- les applications linéaires g, h , et $f = -g + 2h$, de E dans E , représentées dans la base B_0 par les matrices respectives B, C et A ,
- la matrice I , matrice identité de dimension 3,
- les matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et $A = -B + 2C$.

16) On a respectivement :

- A) $B^2 = I$ et $C^2 = C$,
- B) $B^2 = -B$ et $C^2 = -C$,
- C) $B^2 = B$ et $C^2 = C$,
- D) $B^2 = 0$ et $C^2 = I$.

17) On a respectivement :

- A) $BC = I$ et $CB = 0$,
- B) $BC = B$ et $CB = C$,
- C) $BC = 0$ et $CB = B$,
- D) $BC = 0$ et $CB = 0$.

18) La matrice C est de rang :

- A) 0,
- B) 1,
- C) 2,
- D) 3.

19) Dans la base B_0 , l'application f est représentée par la matrice A , qui vaut :

- A) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
- B) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$,
- C) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$,
- D) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

20) La matrice A^2 a pour expression :

- A) $4C - B$,
- B) $4C + B$,
- C) $-4C - B$,
- D) $-4C + B$.

21) Pour n entier naturel non nul, la matrice A^n a pour expression :

- A) $2^n C - (-1)^n B$,
- B) $-2^n C + (-1)^n B$,
- C) $2^n C + (-1)^n B$,
- D) $(-1)^n C + 2^n B$.

22) Le vecteur $h(\vec{e}_2)$ vaut :

- A) $-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,
- B) $\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$,
- C) $\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,
- D) $-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

23) Soient les vecteurs $\vec{u} \in E$ et $\vec{v} = h(\vec{u})$. On note (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) les composantes respectives de \vec{u} et \vec{v} dans la base B_0 . Alors la quantité v_2 vaut :

- A) $u_1 + u_2 + u_3$,
- B) $-u_1 + u_2 + u_3$,
- C) $u_1 - u_2 - u_3$,
- D) $-u_1 + u_2 - u_3$.

24) Le déterminant de la matrice A vaut :

- A) 2,
- B) -1,
- C) 0,
- D) -2.

25) Soit P_A le polynôme caractéristique de la matrice A , défini par $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. La quantité $P_A(\lambda)$ a pour expression :

- A) $(1 + \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 3 \\ -3 & 2 - \lambda & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,
- B) $(1 + \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 3 \\ -3 & 2 - \lambda & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$,
- C) $(-1 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & -4 - \lambda \end{vmatrix}$,
- D) $(-1 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 3 \\ -3 & 2 - \lambda & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

- 26) La matrice A possède :
- A) Une valeur propre double $\lambda_1 = -1$ et une valeur propre simple $\lambda_2 = 2$,
 - B) Une valeur propre simple $\lambda_1 = -1$ et une valeur propre double $\lambda_2 = 2$,
 - C) Une valeur propre double $\lambda_1 = -1$ et une valeur propre simple $\lambda_2 = 0$,
 - D) Une valeur propre simple $\lambda_1 = -1$ et une valeur propre double $\lambda_2 = 0$.

On donne les vecteurs : $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,0,-1)$, $v_4 = (-1,1,1)$.

- 27) Pour la valeur propre simple de A , dans la liste de vecteurs $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, un vecteur propre est :
- A) v_1 ,
 - B) v_2 ,
 - C) v_3 ,
 - D) v_4 .
- 28) Pour la valeur propre double de A , dans la liste de vecteurs $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:
- A) v_1 et v_2 sont des vecteurs propres,
 - B) v_1 et v_3 sont des vecteurs propres,
 - C) v_3 est le seul vecteur propre,
 - D) v_4 est le seul vecteur propre.

Il est admis que la matrice A est diagonalisable dans \mathbb{R} . Soit D une matrice semblable à A , et P la matrice de passage de la base B_0 à la base propre associée à D .

- 29) La relation suivante est alors vérifiée :

- A) $A = P^{-1}.D.P$,
- B) $A = P.D.P^{-1}$,
- C) $A = P^{-1}.D.P^{-1}$,
- D) $A = P.D.P$.

- 30) Dans l'écriture de la question précédente :

- A) Les matrices D et P sont uniques,
- B) Une permutation des colonnes de P est possible sans modifier D ,
- C) Une permutation des termes diagonaux de D est possible sans modifier les colonnes de P ,
- D) Une permutation des termes diagonaux de D s'accompagne d'une permutation des colonnes de P .

Thématiques couvertes

Outils de base

- Trigonométrie
- Inégalités dans \mathbb{R}
- Suites numériques (convergence)
- Sommation discrète

Analyse, fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

- Limites, continuité, dérivabilité
- Sens de variation
- Intégration sur un intervalle
- Equations différentielles ordinaires
- Solution générale, solution particulière
- Equations différentielles linéaires à coefficients constants,

Algèbre linéaire

- Espaces vectoriels
- Dimension finie
- Applications linéaires, sous espaces vectoriels associés

Algèbre matricielle

- Matrices et applications linéaires
- Opérations élémentaires
- Déterminants
- Diagonalisation



Nom et Prénom

.....

Feuille de réponses :

Réponses aux questions d'applications directes	Réponses aux questions avancées
Question 1 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 2 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 3 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 4 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 5 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 6 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 7 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 8 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 9 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 10 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 11 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 12 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 13 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 14 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 15 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 16 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 17 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 18 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 19 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 20 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 21 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 22 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 23 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 24 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
	Question 25 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 26 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 27 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
	Question 28 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>
Question 29 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Question 30 : A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D <input type="checkbox"/>	
Total 1 :	Total 2 :