1. Informations concernant l'épreuve

Barème et mode de calcul note finale	1 point par question
Durée	1h30
Calculette autorisée	*NON*
Consignes pour les candidats	*Merci de ne rien marquer sur le sujet* *Pour chaque question de l'épreuve, une seule bonne réponse possible* *Répondez sur la grille séparée* *Seules les grilles correctement remplies seront corrigées*

NB. : Dans cette épreuve, on demande d'indiquer, pour chaque question, la bonne réponse parmi celles qui sont proposées.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Partie I

Pour a réel non nul, on considère les équations différentielles suivantes :

- $y'' + a\,y = 0,$ notée (Hₐ),
- $y'' + a\,y = t^2,$ notée (Eₐ).

On pose

- $X(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

1) L'équation (Hₐ) est équivalente à :
   A) $X' = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$
   B) $X' = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$
   C) $X' = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$
   D) $X' = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$

Dans les questions 2) à 8) on considère $a < 0$, et on note A la matrice 2×2 qui vérifie $X' = AX$.

2) Les valeurs propres de A sont :
   A) $\lambda_1 = a \;\; \lambda_2 = 1,$
   B) $\lambda_1 = \sqrt{-a},\; \lambda_2 = -\sqrt{-a},$
   C) $\lambda_1 = -a,\; \lambda_2 = 1,$
   D) $\lambda_1 = -1,\; \lambda_2 = a.$

3) Les espaces propres associés à ces valeurs propres sont :
   A) $E_{\lambda_1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \sqrt{-a} \\ 1 \end{pmatrix},\; E_{\lambda_2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -\sqrt{-a} \\ 1 \end{pmatrix}$
   B) $E_{\lambda_1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\; E_{\lambda_2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   C) $E_{\lambda_1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix},\; E_{\lambda_2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$
   D) $E_{\lambda_1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-a} \end{pmatrix},\; E_{\lambda_2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{-a} \end{pmatrix}$

4) La matrice A peut se décomposer en $A = P.D.P^{-1}$ où :
   A) $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$
   B) $D = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -\sqrt{-a} & -\sqrt{-a} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$
   C) $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix},$
   D) $D = \begin{pmatrix} \sqrt{-a}, & 0 \\ 0 & -\sqrt{-a}, \end{pmatrix},\; P = \begin{pmatrix} \sqrt{-a} & -\sqrt{-a} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

5) En posant $Z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X$, l'équation (Ha) est équivalente à :
   A) $Z' = DZ,$
   B) $Z' = PDZ,$
   C) $Z' = DP^{-1}Z,$
   D) $Z' = PDP^{-1}Z.$

6) La solution du système précédent, vérifiant $u(0) = \alpha$ et $v(0) = \beta$ est :
   A) $t \longmapsto u(t) = \alpha e^{\sqrt{-a}t}, t \longmapsto v(t) = \beta e^{-\sqrt{-a}t}$
   B) $t \longmapsto u(t) = \alpha e^{t}, t \longmapsto v(t) = \beta e^{-t}$
   C) $t \longmapsto u(t) = \alpha e^{-at}, t \longmapsto v(t) = \beta e^{t}$
   D) $t \longmapsto u(t) = \alpha e^{at}, t \longmapsto v(t) = \beta e^{-t}$

7) L'équation différentielle (Hₐ) admet une solution générale de la forme :
   A) $t \longmapsto y(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{-t}$ où $(\alpha, \beta) \epsilon \mathbb{R}^2,$
   B) $t \longmapsto y(t) = \alpha e^{-at} + \beta e^{t}$ où $(\alpha, \beta) \epsilon \mathbb{R}^2,$
   C) $t \longmapsto y(t) = \alpha e^{\sqrt{-a}t} + \beta e^{-\sqrt{-a}t}$ où $(\alpha, \beta) \epsilon \mathbb{R}^2,$
   D) $t \longmapsto y(t) = \alpha e^{at} + \beta e^{-t}$ où $(\alpha, \beta) \epsilon \mathbb{R}^2.$

8) L'équation différentielle (Eₐ) admet une solution particulière de la forme :
   A) $t \longmapsto y_p(t) = \frac{1}{a}t^2 + \frac{2}{a^2},$
   B) $t \longmapsto y_p(t) = \frac{1}{a}t^2 - \frac{2}{a^2},$
   C) $t \longmapsto y_p(t) = at^2 - 2,$
   D) $t \longmapsto y_p(t) = t^2.$

Dans les questions 9) à 11) on considère $a = 1$, et A la matrice de la question 2 qui vérifie $X' = AX$.

9) Dans $\mathbb{C}$ les valeurs propres de A sont :
   A) $\lambda_1 = i,\; \lambda_2 = 1,$
   B) $\lambda_1 = i,\; \lambda_2 = -i,$
   C) $\lambda_1 = -1,\; \lambda_2 = 1,$
   D) $\lambda_1 = -i,\; \lambda_2 = -1.$

10) Les espaces propres associés à ces valeurs propres sont :
   A) $E_{\lambda_1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},\; E_{\lambda_2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix},$
   B) $E_{\lambda_1} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},\; E_{\lambda_2} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix},$
   C) $E_{\lambda_1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},\; E_{\lambda_2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$
   D) $E_{\lambda_1} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},\; E_{\lambda_2} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$

11) L'équation différentielle (Hₐ) admet une solution générale de la forme :
   A) $t \longmapsto y(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$
   B) $t \longmapsto y(t) = \alpha\sin(t + \phi)$ où $(\alpha, \phi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R},$
   C) $t \longmapsto y(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,$
   D) $t \longmapsto y(t) = \alpha\cos(t + \phi)$ où $(\alpha, \phi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$

Partie II

Dans les questions 12) à 21), on considère :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi : pour tout $x \epsilon [-\pi, \pi\,]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique.
- les suites $(a_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\,\in\mathbb{N}^*}$ définies ainsi :
  pour $n\ \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\,(nx)dx$ et pour $n\ \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\,(nx)dx$,
- la suite $(S_n)_{n\,\in\mathbb{N}^*}$, définie pour $n\ \in \mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}$.
- la suite $(U_n)_{n\,\in\mathbb{N}^*}$, définie pour $n\ \in \mathbb{N}^*$ par : $U_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p^2}$.
- la suite $(V_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$, définie pour $n\ \in \mathbb{N}$ par : $V_n = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(2p+1)^2}$.

Dans la question 12), il est simplement supposé que f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique.

12) Pour tout x réel on a :
 A) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\,(nx)$,
 B) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\,(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(nx)$,
 C) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin\,(nx)$,
 D) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\,(nx)$.

13) a_0 vaut :
 A) $a_0 = 0$,
 B) $a_0 = \frac{2\pi}{3}$,
 C) $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$,
 D) $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$.

14) Pour la suite $(a_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$ on a :
 A) $\forall n\ \in \mathbb{N}^*\ a_n = 0$,
 B) $\forall n\ \in \mathbb{N}^*\ a_n = \frac{1}{n^2}$,
 C) $\forall n\ \in \mathbb{N}^*\ a_n = -\frac{(-1)^n}{n^2}$,
 D) $\forall n\ \in \mathbb{N}^*\ a_n = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$.

15) Pour la suite $(b_n)_{n\,\in\mathbb{N}^*}$ on a :
 A) $\forall n\ \in \mathbb{N}^*\ b_n = 0$,
 B) $\forall n\ \in \mathbb{N}^*\ b_n = \frac{1}{n^2}$,
 C) $\forall n\ \in \mathbb{N}^*\ b_n = -\frac{1}{n^2}$,
 D) $\forall n\ \in \mathbb{N}^*\ b_n = \frac{4}{n^2}$.

16) La suite $(U_n)_{n\,\in\mathbb{N}^*}$ converge vers :
 A) 0
 B) $\frac{\pi^2}{12}$,
 C) $-\frac{\pi^2}{12}$,
 D) $+\infty$.

17) La suite $(S_n)_{n\,\in\mathbb{N}^*}$ converge vers :
 A) $\frac{\pi^2}{3}$,
 B) $\frac{\pi^2}{6}$,
 C) $\frac{\pi^2}{12}$,
 D) $+\infty$.

18) La suite $(V_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$ converge vers :
 A) $\frac{\pi^2}{8}$,
 B) $\frac{\pi^2}{12}$,
 C) $\frac{\pi^2}{24}$,
 D) $+\infty$.

19) Le développement en série entière de la fonction $g\,:\,x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ sur $]0,1[$ est :
 A) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$,
 B) $-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{n-1}$,
 C) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$,
 D) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{n-1}$.

20) L'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ vaut :
 A) $+\infty$,
 B) $\frac{\pi^2}{8}$,
 C) $\frac{\pi^2}{24}$,
 D) $\frac{\pi^2}{12}$.

21) L'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx$ vaut :
 A) $+\infty$,
 B) $-\frac{\pi^2}{8}$,
 C) $-\frac{\pi^2}{6}$,
 D) $\frac{\pi^2}{12}$.

Partie III

Dans les questions 22) à 30), l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est muni du produit scalaire hermitien usuel noté $(.|.)$ défini ainsi : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n\ \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n, (x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ où $\overline{y}$ désigne le conjugué de y. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices de *n* lignes et *n* colonnes à coefficients complexes. L'élément de la i$^{\text{ième}}$ ligne et j$^{\text{ème}}$ colonne est noté A_{ij}. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note A^*, appelée adjointe de A la matrice définie pour tous $1 \leq i, j \leq n$ par $A^*_{ij} = \overline{A_{ji}}$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

22) Pour $A = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$ on a :
- A) $A^* = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$,
- B) $A^* = \begin{pmatrix} 1-i & -i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}$,
- C) $A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ i & 1+i \end{pmatrix}$,
- D) $A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -i & 1+i \end{pmatrix}$.

23) La trace de AA^* est :
- A) 0,
- B) 3,
- C) 4,
- D) 6.

24) Pour $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ on a :
- A) $AA^* = I_2$,
- B) $AA^* = -I_2$,
- C) $A^*A = -I_2$,
- D) $AA^* = -A^*A$,

25) Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout couple $(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$
- A) $(A^*x|y) = (x|A^*y)$,
- B) $(A^*x|y) = (Ax|y)$,
- C) $(A^*x|y) = (x|A^*\overline{y})$
- D) $(A^*x|y) = (x|Ay)$

Dans les questions 26) et 27), on considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie la propriété suivante :
$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n\ (Ax|Ay) = (x|y)$.

26) On a donc :
- A) $AA^* = A^*A = I_n$,
- B) $AA^* = -A^*A = I_n$,
- C) $AA^* = A^2$,
- D) $AA^* = (A^*)^2$.

27) On a pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:
- A) $(A^*x|A^*x) = (x|x)$,
- B) $(A^*x|A^*x) = (A^*x|Ax)$,
- C) $(A^*x|A^*x) = (Ax|A^*x)$,
- D) $(A^*x|A^*x) = (x|Ax)$.

Dans les questions 28) et 29), on considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie $AA^* = A^*A$.

28) On a pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:
- A) $(A^*x|A^*x) = (Ax|Ax)$,
- B) $(A^*x|A^*x) = (A^*x|Ax)$,
- C) $(A^*x|A^*x) = (Ax|A^*x)$,
- D) $(A^*x|A^*x) = (x|Ax)$.

29) Le noyau de A est noté Ker(A). Il vérifie :
- A) $Ker(A) \neq Ker(A^*)$,
- B) $Ker(A) = Ker(A^*)$,
- C) $Ker(A) = \{0\}$,
- D) $Ker(A) = \mathbb{C}^n$.

30) On a :
- A) Toute valeur propre de A est une valeur propre de A^*,
- B) Tout vecteur propre de A est un vecteur propre A^*,
- C) Tout vecteur propre de A est un élément de ker (A^*)
- D) Tout vecteur propre de A^* est un élément de ker (A).

Thématiques couvertes

Outils de base

- Trigonométrie
- Inégalités dans $\mathbb{R}$
- Suites numériques (convergence)
- Sommation discrète

Analyse, fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- Limites, continuité, dérivabilité
- Sens de variation
- Intégration sur un intervalle
- Equations différentielles ordinaires
- Solution générale, solution particulière
- Equations différentielles linéaires à coefficients constants
- Séries de Fourier

Algèbre linéaire

- Espaces vectoriels
- Dimension finie
- Applications linéaires, sous espaces vectoriels associés

Algèbre matricielle

- Matrices et applications linéaires
- Opérations élémentaires
- Déterminants
- Diagonalisation

Feuille de réponses :

Nom et Prénom
…………………………………………………………………..

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

Question 1 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 2 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 3 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 4 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 5 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 6 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 7 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 8 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 9 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 10 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 11 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 12 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 13 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 14 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 15 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 16 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 17 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 18 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 19 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 20 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 21 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 22 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 23 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 24 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 25 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 26 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 27 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 28 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 29 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Question 30 : A ☐ B ☐ C ☐ D ☐