1. Informations concernant l'épreuve

Barème et mode de calcul note finale	1 point par question
Durée	1h30
Calculette autorisée	*NON*
Consignes pour les candidats	*Merci de ne rien marquer sur le sujet* *Pour chaque question de l'épreuve, une seule bonne réponse possible* *Répondez sur la grille séparée* *Seules les grilles correctement remplies seront corrigées*

Concours EG@ 2019
Epreuve écrite de Mathématiques

Durée : 1 heure 30 minutes

NB. : Dans cette épreuve, on demande d'indiquer, pour chaque question, la bonne réponse parmi celles qui sont proposées.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Partie I

Pour *a* réel, on considère les équations différentielles suivantes :

- $y'' + 6y' + a\,y = 0,$ notée (H_a),
- $y'' + 6y' + a\,y = 5\,a\,t,$ notée (E_a).

Dans les questions 1) à 4), on prendra *a* = 5 :

1) La solution générale de (H_5) est la fonction suivante, où *A* et *B* sont des constantes réelles :
A) $t \longmapsto y = A\,e^{-5t} + B,$
B) $t \longmapsto y = A\,e^{-t} + Be^{-3t},$
C) $t \longmapsto y = A\,e^{-5t} + Be^{-t},$
D) $t \longmapsto y = A\cosh(3t) + B\sinh(3t).$

2) La solution de (H_5) vérifiant les relations *y*(0) = 1 et *y'*(0) = 3 est la fonction suivante, notée *f* :
A) $t \longmapsto y = -2\,e^{-5t} + 3e^{-t},$
B) $t \longmapsto y = 2\,e^{-3t} - e^{-t},$
C) $t \longmapsto y = -2\,e^{3t} + 3e^{-3t},$
D) $t \longmapsto y = 2e^{-t} - e^{-5t}.$

3) Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction *f* :
A) est strictement croissante,
B) admet un maximum en $t_0 = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5}{2}\right),$
C) est strictement décroissante,
D) admet un maximum en $t_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right).$

4) Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction *f* :
A) ne change pas de signe,
B) change une fois de signe,
C) change deux fois de signe,
D) change trois fois de signe.

Dans les questions 5) à 8), on prendra *a* = 10 :

5) La solution générale de (H_{10}) est la fonction suivante, où *A* et *B* sont des constantes réelles :
A) $t \longmapsto y = e^{-5t}(A\,\cos(3t) + B\sin(3t)),$
B) $t \longmapsto y = e^{-3t}(A\,\cos(t) + B\sin(t)),$
C) $t \longmapsto y = e^{-t}(A\,\cos(3t) + B\sin(3t)),$
D) $t \longmapsto y = e^{-3t}(A\,t + B).$

6) La solution de (H_{10}) vérifiant les relations *y*(0) = 1 et *y'*(0) = –2 est la fonction :
A) $t \longmapsto y = e^{-3t}(\cos(t) - \sin(t)),$
B) $t \longmapsto y = e^{-t}(2\cos(t) - \sin(t)),$
C) $t \longmapsto y = e^{-3t}(\cos(t) + \sin(t)),$
D) $t \longmapsto y = e^{-3t}\cos(t).$

7) Sur $\mathbb{R}_+$, l'ensemble des points en lesquels la fonction définie dans la question 6) s'annule est caractérisé par :
A) $t_k = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}^*,$
B) $t_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$
C) $t_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}^*,$
D) $t_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{N}^*.$

8) L'équation différentielle (E_{10}) admet une solution particulière de la forme :
A) $t \longmapsto y_p(t) = -5t - 3,$
B) $t \longmapsto y_p(t) = -5t + 3,$
C) $t \longmapsto y_p(t) = 5t - 3,$
D) $t \longmapsto y_p(t) = 5t + 3.$

Partie II

Dans les questions 9) à 20), on considère :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - \frac{1}{2}}{e^x + 1}$,
- la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par : $x_0 = \ln(2)$, $I_0 = \int_{-x_0}^{x_0} dx$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_{-x_0}^{x_0} f(x)^n dx$,
- la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p.2^p}$.

9) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, sa dérivée $f'(x)$ vaut :
   A) $\frac{1}{2}\frac{e^x - \frac{1}{2}}{(e^x+1)^2}$,
   B) $\frac{3}{4}\frac{e^{-x}}{(e^x+1)^2}$,
   C) $2\frac{e^{-x}+1}{(e^x+1)^2}$,
   D) $\frac{3}{2}\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

10) L'intégrale I_1 vaut :
   A) $\int_{1/2}^{2} \frac{t-\frac{1}{2}}{t(t+1)} dt$,
   B) $\int_{1/2}^{2} \frac{t-\frac{1}{2}}{t+1} dt$,
   C) $\int_{-1/2}^{2} \frac{t-\frac{1}{2}}{t(t+1)} dt$,
   D) $\int_{-1/2}^{2} \frac{t\left(t-\frac{1}{2}\right)}{t+1} dt$.

11) Pour tout réel t strictement positif, la quantité $\frac{t-\frac{1}{2}}{t(t+1)}$ vaut :
   A) $\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t}$,
   B) $\frac{2}{t+1} - \frac{1}{2t}$,
   C) $\frac{3}{2(t+1)} - \frac{1}{2t}$,
   D) $\frac{3}{2(t+1)} - \frac{1}{t}$.

12) L'intégrale I_1 vaut :
   A) $\ln(3) + \ln(2)$,
   B) $2\ln(3)$,
   C) $\frac{\ln(2)}{2}$,
   D) $\ln(3) - \frac{\ln(2)}{2}$.

13) Sur l'intervalle $J = [-x_0, x_0]$, la fonction f est :
   A) strictement croissante,
   B) d'abord croissante, puis décroissante,
   C) strictement décroissante,
   D) d'abord décroissante, puis croissante.

14) Pour tout x de J, on a :
   A) $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2)}{2}$,
   B) $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$,
   C) $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$,
   D) $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

15) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   A) $-\frac{\ln(2)}{2^n} \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{2^{n+1}}$,
   B) $0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{2^{n-1}}$,
   C) $\frac{1}{2^{n+1}} \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{2^n}$,
   D) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-2}} \leq I_n \leq 2^n$.

16) La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
   A) converge vers 1/2,
   B) converge vers ln(2),
   C) est divergente,
   D) converge vers 0.

17) Pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-x_0}^{x_0} f(x)^n f'(x) dx$ vaut :
   A) $\frac{(\ln(2))^n}{n+1}$,
   B) $\frac{2^n}{n+1}$,
   C) $\frac{(\ln(2))^n}{n}$,
   D) $\frac{1}{2^n(n+1)}$.

18) La relation $2(f(x))^2 - f(x) - 1 + 3f'(x) = 0$ est admise pour tout réel x. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $2I_{n+2} - I_{n+1}$ vaut :
   A) $I_n - \frac{3}{2^{n+1}(n+1)}$,
   B) $-I_n + \frac{3}{2^n(n+1)}$,
   C) $2I_n - \frac{3(\ln(2))^n}{n+1}$,
   D) $I_n - \frac{3}{2^n(n+1)}$.

19) D'après la réponse à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on a :
   A) $3(S_n - S_1) = I_0 + I_1 - I_{n-1} - I_n$,
   B) $3S_n = I_0 + 2I_1 - I_{n-1} - 2I_n$,
   C) $3S_n = I_0 + 2I_1 - I_n - 2I_{n+1}$,
   D) $3S_{n-1} = 2I_0 + 2I_1 - 2I_{n-1} - 2I_n$.

20) La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers :
   A) $3\ln(2)$,
   B) $2/3$,
   C) $\ln(2)$,
   D) $\ln(6)$.

Partie III

Dans les questions 21) à 30), on considère :

- un espace vectoriel E muni d'une base $B_0 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$,
- l'application linéaire f de E dans E, représentée dans la base B_0 par la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$,
- la matrice I, matrice identité de dimension 3.

21) Soient les vecteurs $\vec{u} \in E$ et $\vec{v} = f(\vec{u})$. On note (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) les composantes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base B_0. Alors la quantité v_2 vaut :
A) $\frac{2}{3}u_1 + 2u_3$,
B) $u_1 + \frac{1}{6}u_3$,
C) $\frac{1}{6}u_1 + u_3$,
D) $2u_1 + \frac{2}{3}u_3$.

22) La matrice A^2 vaut :
A) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,
B) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,
C) $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,
D) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

23) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la quantité A^{2k+1} vaut :
A) $A - kI$,
B) $(-A)^k + A - I$,
C) $(-1)^k A$,
D) A.

24) Le déterminant de la matrice A vaut :
A) -3,
B) -1,
C) 0,
D) 1.

25) Soit P le polynôme caractéristique de la matrice A, défini par $P(\lambda) = Det(A - \lambda I)$. La quantité $P(\lambda)$ a pour expression :
A) $-\lambda(1-\lambda)^2$,
B) $\lambda(1-\lambda^2)$,
C) $-\lambda(1+\lambda)^2$,
D) $(1+\lambda)^2(1-\lambda)$.

26) La matrice A possède comme vecteur propre le vecteur :
A) (3,0,1),
B) (1,0,3),
C) (6,6,1),
D) $(6,-6,-1)$.

27) Le noyau de f est noté Ker(f). Il est égal à :
A) $\{\vec{0}\}$,
B) $Vect\{(-3,0,1)\}$,
C) $Vect\{(3,0,1)\}$,
D) $Vect\{(3,0,1),(-3,0,1)\}$.

28) La matrice A est de rang :
A) 0,
B) 1,
C) 2,
D) 3.

29) On admet que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Cette propriété résulte du fait que :
A) Toutes les valeurs propres de A sont réelles simples,
B) A possède au moins une valeur propre réelle multiple,
C) A est inversible,
D) A est non inversible.

30) Dans l'écriture $A = P.D.P^{-1}$:
A) Les matrices D et P sont uniques,
B) Une permutation des colonnes de P est possible sans modifier D,
C) Une permutation des termes diagonaux de D est possible sans modifier les colonnes de P,
D) Une permutation des termes diagonaux de D s'accompagne d'une permutation des colonnes de P.

Thématiques couvertes

Outils de base

- Trigonométrie
- Inégalités dans $\mathbb{R}$
- Suites numériques (convergence)
- Sommation discrète

Analyse, fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- Limites, continuité, dérivabilité
- Sens de variation
- Intégration sur un intervalle
- Equations différentielles ordinaires
- Solution générale, solution particulière
- Equations différentielles linéaires à coefficients constants,

Algèbre linéaire

- Espaces vectoriels
- Dimension finie
- Applications linéaires, sous espaces vectoriels associés

Algèbre matricielle

- Matrices et applications linéaires
- Opérations élémentaires
- Déterminants
- Diagonalisation

Feuille de réponses :

Nom et Prénom
……………………………………………………………..

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

Question 1 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 16 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 2 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 17 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 3 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 18 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 4 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 19 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 5 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 20 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 6 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 21 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 7 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 22 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 8 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 23 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 9 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 24 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 10 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 25 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 11 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 26 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 12 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 27 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 13 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 28 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 14 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 29 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐
Question 15 :	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐	**Question 30 :**	A ☐ B ☐ C ☐ D ☐