



Euro Graduation Access / Concours EG@
Mars 2013

Nom : Prénom : N°:

Date de naissance : Signature :

Mathématiques
Durée : 1 heure 30 minutes
Les calculatrices ne sont pas autorisées

Répondre par (V) **vrai** ou (F) **faux** aux affirmations des questions suivantes :

Barème : 1 point par question, le total des points sera ramené sur 20.

Exercice 1.

Comment peut-on compléter la phrase :

"Une matrice carrée M d'ordre n est diagonalisable..." ?

- | | | |
|-----|---|--------------------------|
| (1) | si et seulement si elle a n valeurs propres distinctes ; | <input type="checkbox"/> |
| (2) | s'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que : | <input type="checkbox"/> |
| | $P^{-1} \cdot M \cdot Q$ soit une matrice diagonale ; | <input type="checkbox"/> |
| (3) | s'il existe une famille libre de n vecteurs colonnes | <input type="checkbox"/> |
| | qui soient vecteurs propres de M ; | <input type="checkbox"/> |
| (4) | si et seulement si il existe une famille libre de n vecteurs colonnes | <input type="checkbox"/> |
| | qui soient vecteurs propres de M ; | <input type="checkbox"/> |
| (5) | s'il existe une matrice inversible P telle que : | <input type="checkbox"/> |
| | $P^{-1} \cdot M \cdot P$ soit une matrice diagonale ; | <input type="checkbox"/> |

Exercice 2.

Soient a, b et c trois réels non nuls,

$$U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix};$$

Que peut-on dire des valeurs propres des matrices formées à partir de $U, V, {}^tU$ et tV ?

- | | | |
|-----|---|--------------------------|
| (6) | Les valeurs propres de $U \cdot V$ sont 0, 0 et 3 ; | <input type="checkbox"/> |
| (7) | 3 est l'unique valeur propre de $V \cdot U$; | <input type="checkbox"/> |
| (8) | Les valeurs propres de ${}^tV \cdot V$ sont 0, 0 et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; | <input type="checkbox"/> |
| (9) | Les valeurs propres de ${}^t(U \cdot V) \cdot U \cdot V$ sont 0, 0 et 9 ; | <input type="checkbox"/> |

Exercice 3.
Soient a un réel non nul,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$$

Que peut-on dire de ces matrices et de leurs puissances successives ?

(10) $M^2 = M + 2Id_3$

(11) $N^2 = N + 2Id_2$

(12) -1 et 2 sont valeurs propres de M et de N

Exercice 4.

(13) Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang

(14) Si (u_n) converge vers l , alors (u_n) converge vers l ou $-l$

(15) Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , la suite $(x_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l

(16) Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0

(17) Toute suite encadrée par deux suites convergentes est une suite convergente

(18) La différence de deux suites équivalentes converge vers 0

(19) Le quotient de deux suites non nulles équivalentes converge vers 1

(20) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n = 1$

(21) De toute suite d'éléments de $[a, b]$, on peut extraire une suite qui converge vers un élément de $[a, b]$

(22) La somme de deux fonctions monotones est monotone

(23) La composée de deux fonctions monotones est monotone

(24) Toute fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ est croissante au voisinage de $+\infty$

(25) Toute fonction périodique monotone est constante

(26) Toute fonction périodique possède une plus petite période strictement positive

(27) Toute fonction monotone sur \mathbf{R} admet une limite à gauche et une limite à droite

(finie ou infinie) en tout point

(28) Toute fonction admettant en un point une limite à gauche et une limite à droite égales est continue en ce point

(29) Pour toute fonction, il existe au moins un intervalle ouvert non vide sur lequel elle est monotone

(30) Si deux fonctions sont égales au voisinage de a , leur différence tend vers 0 en a